□23□ □□□□□□□□

1□□□□□ $f(x)=a(lnx+\frac{1}{x})$ □ $a\in R$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□

□2□□□□ $2f(x)-lnx+x+2=0$ □□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□1□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

$f'(x)=a(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=\frac{a(x-1)}{x^2}$ □

□ $a>0$ □□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□

□□ $f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□ a □

□ $a=0$ □□ $f(x)=0$ □□□□□□□

□ $a<0$ □□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□

□□ $f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□ a □

□2□□ $h(x)=2f(x)-lnx+x+2$ □□ $h(x)=(2a-1)lnx+\frac{2a}{x}+x+2$ □

$h'(x)=\frac{2a-1}{x}-\frac{2a}{x^2}+1=\frac{(x-1)(x+2a)}{x^2}\,(x>0)$ □

①□ $a..0$ □□□ $x\in(0,1)$ □□ $h'(x)<0$ □ $h(x)$ □□□□□

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□□□ $h(x)$ □□□□□□□□

②□ $a=-\frac{1}{2}$ □□ $x\in(0,+\infty)$ □ $h'(x)..0$ □□ h' □1□ $=0)$ □

$h(x)$ □□□□□ $h(x)$ □□□□□□□□

③□ $-\frac{1}{2}<a<0$ □□ $0<-2a<1$ □

□ $x\in(0,-2a)$ □ $x\in(1,+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□□□

□ $x\in(-2a,1)$ □□ $h'(x)<0$ □ $h(x)$ □□□□□

□□ $h(x)$ □□□□□□□□□ $\begin{cases}h(-2a)>0\\ h(1)<0\end{cases}$ □□□

□ h□1□<0 □□ $a<-\frac{3}{2}$ □□□ $-\frac{1}{2}<a<0$ □□□□□ $h(x)$ □□□□□□□□□

④ □ $a<-\frac{1}{2}$ □□ $-2a>1$ □□ $x\in(0,1)$ □ $x\in(-2a,+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□□□

□ $x\in(1,-2a)$ □□ $h'(x)<0$ □ $h(x)$ □□□□□

□□ $h(x)$ □□□□□□□□□ $\begin{cases}h(1)>0\\ h(-2a)<0\end{cases}$ □□□

□ h□1□>0 □□ $a>-\frac{3}{2}$ □

□ $h(-2a)=(2a-1)[ln(-2a)-1]<0$ □ $a<-\frac{1}{2}$ □□ $a<-\frac{e}{2}$ □

$\therefore -\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$ □□□□□ $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$ □□ $0<e^{2}<1$ □ $e^{2}>-2a$ □

$h(e^{2})=4+e^{2}+2a(e^{2}-2)<4+e^{2}-e(e^{2}-2)<4+1-5e<0$ □

$h(e^{2})=e^{2}+2a(e^{2}+2)>e^{2}-3(e^{2}+2)=e^{2}-6-3e^{2}>e^{2}-7>0$ □

□□□□ $h(x)$ □□□□□□ a □□□□□□ $(-\frac{3}{2},-\frac{e}{2})$ □

2□□□□□ $f(x)=xlnx-(a+1)x+1$ □ $a\in R$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□

□2□□□□ $(2a-1)(\frac{f(x)}{x}+a+1)+\frac{1}{x}+x+2=0$ □□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□1□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=lnx-a$ □

□ $x>e^{a}$ □□ $f'(x)>0$ □□□□□□□□□ $0<x<e^{a}$ □□ $f'(x)<0$ □□□□□□□□

□□ $x=e^{a}$ □□□□□□□□□ $f(e^{a})=1-e^{a}$ □□□□□□□

(2 □□ $(2a-1)(\frac{f(x)}{x}+a+1)+\frac{1}{x}+x+2=0$ □□□□ $(1-2a)(x\ln x+1)=(x+1)^{2}$ □

□ $y=x\ln x+1$ □□ $y'=\ln x+1=0$ □□ $x=\frac{1}{e}$ □

□□□ $x>\frac{1}{e}$ □□□□□□□□□□ $x<\frac{1}{e}$ □□□□□□□□□

□ $x=\frac{1}{e}$ □□□□□□□□□ $1-\frac{1}{e}>0$ □ $y=x\ln x+1>0$ □

□□□□□□□□ $1-2a=\frac{(x+1)^{2}}{x\ln x+1}$ □

□ $g(x)=\frac{(x+1)^{2}}{x\ln x+1}$ □□ $g'(x)=\frac{(x+1)(\ln x-1)(x-1)}{(x\ln x+1)^{2}}$ □

□□ $x>0$ □

□□□ $x>e$ □ $0<x<1$ □□ $g'(x)>0$ □□□□□□□□□ $1<x<e$ □□ $g'(x)<0$ □□□□□□□□

□□ $x=1$ □□□□□□□□□ g□1□ $=4$ □□ $x=e$ □□□□□□□□□ g□e□ $=e+1$ □

□□□□□□ $y=1-2a$ □ $g(x)3$ □□□□□ $e+1<1-2a<4$ □

□□□□ $\frac{3}{2}<a<\frac{e}{2}$ □

□ a □□□ $(\frac{3}{2},\frac{e}{2})$ □

3□□□□□ $f(x)=x^{3}-kx+k^{2}$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□□ k □□□□□□

□□□□□□□1□ $f(x)=x^{3}-kx+k^{2}$ □ $f'(x)=3x^{2}-k$ □

$k \le 0$□□ $f'(x) \ge 0$□ $f(x)$ □ R□□□

$k > 0$□□□ $f'(x) > 0$□□□□ $x > \sqrt{\frac{k}{3}}$ □ $x < -\sqrt{\frac{k}{3}}$ □

□ $f'(x) < 0$□□□□ $-\sqrt{\frac{k}{3}} < x < \sqrt{\frac{k}{3}}$ □

$\therefore f(x)$ □ $(-\infty, -\sqrt{\frac{k}{3}})$ □□□□ $(-\sqrt{\frac{k}{3}}$ □ $\sqrt{\frac{k}{3}})$ □□□□ $(\sqrt{\frac{k}{3}}$ □ $+\infty)$ □□□

□□□ $k \le 0$□□ $f(x)$ □ R□□□

$k > 0$□□ $f(x)$ □ $(-\infty, -\sqrt{\frac{k}{3}})$ □□□□ $(-\sqrt{\frac{k}{3}}$ □ $\sqrt{\frac{k}{3}})$ □□□□ $(\sqrt{\frac{k}{3}}$ □ $+\infty)$ □□□

□2□□□1□□□ $k > 0$□ $f(x)_{□□□} = f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ □ $f(x)_{□□□} = f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ □

□ $f(x)$ □□□□□□

□□ $\begin{cases} k > 0 \\ f(\sqrt{\frac{k}{3}}) < 0 \\ f(-\sqrt{\frac{k}{3}}) > 0 \end{cases}$ □□□□ $0 < k < \frac{4}{27}$ □

□ $k \in (0, \frac{4}{27})$ □

4□□□□□ $f(x) = e^x - a(x-2)^2$ □ $a > 0$□ $f'(x)$ □ $f(x)$ □□□□□

□1□□□ $f(x)$ □□□□□□ $f'(x)$ □□□□□ m□□□□□ $m \le e^2$ □

□2□□ $f(x)$ □□□□□□□ a□□□□□□

□□□□□□□1□□□ $f(x) = e^x - a(x-2)^2$ □ $a > 0$ □

$f'(x)=e^x-2a(x-2)=g(x)$，

$g'(x)=e^x-2a$，

令 $g'(x)=e^x-2a=0$，解得 $x_0=ln(2a)$.

可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)_{min}=g(x_0)=g(ln(2a))=2a-2a(ln(2a)-2)=6a-2aln(2a)$，

① 令 $6a-2aln(2a)\ldots 0$，化为: $ln(2a)\,,,\,3$，解得 $a\,,,\,\frac{e^3}{2}$.

$\therefore 0<a\,,\,\frac{e^3}{2}$ 时，$f'(x)\ldots 0$，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

令 $6a-2aln(2a)<0$，化为: $ln(2a)>3$，解得 $a>\frac{e^3}{2}$.

$x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$.

$\therefore$ 存在 $2<x_1<x_2$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

可得：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 (x_1, x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增.

综上可得: $0<a\,,,\,\frac{e^3}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

$a>\frac{e^3}{2}$ 时. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 (x_1, x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增.

其中 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

② 由上面可得: $x_0=ln(2a)$ 时，$f'(x)$ 取得最小值，$\therefore m=6a-2aln(2a)$，令 $2a=t>0$.

$u(t)=3t-tlnt$，令 $u'(t)=3-lnt-1=2-lnt=0$，解得 $t=e^2$. $\therefore m\,,\,u(e^2)=3e^2-e^2lne^2=e^2$.

$\therefore m, e^2$ □

□2□□□ $f(x)=e^x-a(x-2)^2$ □ $a>0$ □

□ f □2□ $=e^2\neq 0$ □ $\therefore 2$ □□□□ $f(x)$ □□□□

□ $f(x)=e^x-a(x-2)^2=0$ □□□□ $a=\dfrac{e^x}{(x-2)^2}(x\neq 2)$ □

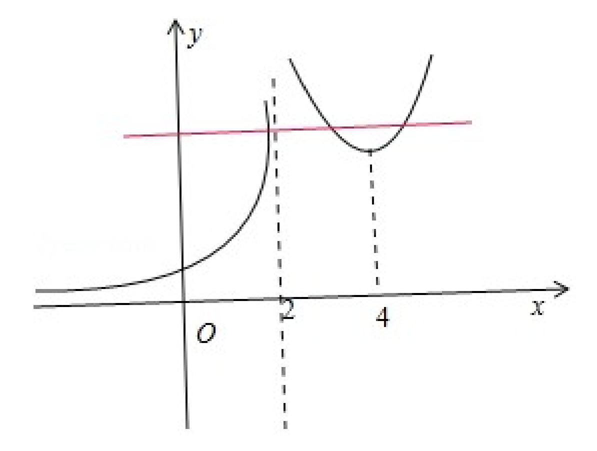
□ $G(x)=\dfrac{e^x}{(x-2)^2}(x\neq 2)$ □□□ $G(x)=\dfrac{e^x(x-4)}{(x-2)^3}$ □

□□□□ $G(x)$ □ $(-\infty,2)$ □□□□□□□ $(2,4)$ □□□□□□□ $(4,+\infty)$ □□□□□□

G □4□ $=\dfrac{e^4}{4}$ □

□□□□□□□ $a>\dfrac{e^4}{4}$ □

$\therefore a$ □□□□□□ $(\dfrac{e^4}{4}$ □ $+\infty)$ □



5□□□□□ $f(x)=xe^x-ax^2-2ax$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□1□□□ $f(x)=xe^x-ax^2-2ax$ □□□□□ R □

$f'(x)=e^x+xe^x-2ax-2a=e^x(x+1)-2a(x+1)=(x+1)(e^x-2a)$ □

①□ $a\leqslant 0$ □□ $e^x-2a>0$ □□ $x<-1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>-1$ □□ $f'(x)>0$ □

□□ $f(x)$ □ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□ $(-1,+\infty)$ □□□□□□

②□ $a>0$ □□□ $f'(x)=0$ □□□ $x=-1$ □ $x=ln(2a)$ □

□i□□ $a=\frac{1}{2e}$ □□ $f(x)$ □ R □□□□□□

□ii□□ $0<a<\frac{1}{2e}$ □□□ $x<ln(2a)$ □□ $f'(x)>0$ □□ $ln(2a)<x<-1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $x>-1$ □□ $f'(x)>0$ □

□□ $f(x)$ □ $(-\infty$ □ $ln(2a))$ □□□□□□□ $(ln(2a)$ □ $-1)$ □□□□□□□ $(-1,+\infty)$ □□□□□□

□iii□□ $a>\frac{1}{2e}$ □□□ $x<-1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $-1<x<ln(2a)$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>ln(2a)$ □□ $f'(x)>0$ □

□□ $f(x)$ □ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□ $(-1$ □ $ln(2a))$ □□□□□□□ $(ln(2a)$ □ $+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□ $a\leqslant 0$ □□ $f(x)$ □ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□ $(-1,+\infty)$ □□□□□□

□ $0<a<\frac{1}{2e}$ □□ $f(x)$ □ $(-\infty$ □ $ln(2a))$ □□□□□□□ $(ln(2a)$ □ $-1)$ □□□□□□□ $(-1,+\infty)$ □□□□□□

□ $a=\frac{1}{2e}$ □□ $f(x)$ □ R □□□□□□

□ $a>\frac{1}{2e}$ □□ $f(x)$ □ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□ $(-1$ □ $ln(2a))$ □□□□□□□ $(ln(2a)$ □ $+\infty)$ □□□□□□

□2□□□ $f(x)=xe^x-ax^2-2ax=x(e^x-ax-2a)$ □

□ $f(0)=0$ □□ $f(x)$ □□□□□ 0□

□ $g(x)=e^x-ax-2a$ □

要使 $f(x)$ 有三个零点，只需要 $g(x)=e^x-ax-2a$ 有两个不为 0 的零点，

若 $g(x)=e^x-ax-2a$ 的零点为 0，即 $g(0)=e^0-2a=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

此时 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x-1$ 有两个零点，但有一个零点是 0，此时 $f(x)$ 只有两个零点，故 $a\neq\frac{1}{2}$；

又 $g'(x)=e^x-a$，

① 当 $a\leq 0$ 时，$g'(x)=e^x-a>0$，则 $g(x)$ 在 R 上单调递增，故 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意；

② 当 $a>0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)_{min}=g(\ln a)=a-a\ln a-2a=-a(1+\ln a)$，

(i) 当 $0<a\leq\frac{1}{e}$ 时，$g(x)_{min}=g(\ln a)\geq 0$，故 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意，舍去；

(ii) 当 $a>\frac{1}{e}$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)_{min}=g(\ln a)<0$，

因为 $g(-2)=e^{-2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上有唯一零点，

由（1）知，当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$，

则当 $x>4$ 且 $x>2\ln(2a)$ 时，$g(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\frac{2\ln(2a)}{2}}\cdot(\frac{x}{2}+2)-a(x+2)=2a>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上有唯一零点，

从而 $g(x)$ 在 R 上有两个零点，此时 $f(x)$ 有三个零点.

综上所述，$f(x)$ 恰有三个零点时 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

6. 已知函数 $f(x)=-\frac{t}{3}x^3+(2+t)x^2-8x-4t+7$.

(1) 当 $t>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

□2□□□□□ $g(x)=\ln x$ □□□□ $m(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ □□□□ $m(x)$ □□□□□□□□□ t □□□□□□

□□□□□□1□ $f'(x)=-tx^2+2(t+2)x-8=-(x-2)(tx-4)$ □

□ $f'(x)=0$ □□ $x_1=2, x_2=\frac{4}{t}$ □

□ $t=2$ □□□□□ $f(x)$ □ R □□□□□

□ $t>2$ □□ $x_1>x_2$ □□□□ $f(x)$ □ $(-\infty,\frac{4}{t}),(2,+\infty)$ □□□□□ $(\frac{4}{t},2)$ □□□□

□ $0<t<2$ □□ $x_1<x_2$ □□□□ $f(x)$ □ $(-\infty,2),(\frac{4}{t},+\infty)$ □□□□□ $(2,\frac{4}{t})$ □□□□

□2□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□ $x=1$ □□□□□

① □ $t=0$ □□ $f(x)=2x^2-8x+7$ □□ $f(x)=0$ □□ $x=2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in(1,+\infty)$ □

□□ $m(x)$ □□□□□□

② □ $t<0$ □□ $f'(x)=-(x-2)(tx-4)$ □□ $x_1=2, x_2=\frac{4}{t}<0$ □

□□□ $f(x)$ □□ $(0,2)$ □□□□□ $(2,+\infty)$ □□□□

$f(0)=7-4t>0,\ f(1)=1-\frac{10}{3}t>0$ □

$\therefore$ □ $x, 1$ □□ $m(x)=g(x)$ □□ $y=m(x)$ □ $(0$ □ $1]$ □□□□□□□□

□□□□ $y=m(x)$ □□□□□□

□□□□ $f(2)=-\frac{8t}{3}-1<0$ □□□ $-\frac{3}{8}<t<0$ □

③ □ $t>0$ □□

(i) □ $t=2$ □□ $f(x)$ □□□□□□

□□□□ $y=m(x)$ □□□ 2 □□□□□□□□□□□□□

(ii)□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□ 1 □□□□

□□□□ $y=m(x)$ □□□ 2 □□□□□□□□□□□□

(iii) □ f □1□ <0 □□ $t>\frac{3}{10}$ □□□□ $y=m(x)$ □□□ 2 □□□□□□□□□□□□

□ f □1□ $=0$ □□ $t=\frac{3}{10}$ □□ $f(x)_{□□□}=f\left(\frac{4}{t}\right)=\frac{1}{t^3}\left(-4t^3+7t^2-16t+\frac{32}{3}\right)>0$ □

□□ $y=m(x)$ □□ 3 □□□□□□□□□□

□ f □1□ >0 □□ $0<t<\frac{3}{10}$ □□ $f(x)_{□□□}=f\left(\frac{4}{t}\right)=\frac{1}{t^3}\left(-4t^3+7t^2-16t+\frac{32}{3}\right)>0$ □

□ $\varphi(t)=-4t^3+7t^2-16t+\frac{32}{3}(0<t<\frac{3}{10})$ □□ $\varphi'(t)=-12t^2+14t-16<\varphi'(\frac{3}{10})<0$ □

□ $\varphi(t)$ □ $(0,\frac{3}{10})$ □□□□□ $\varphi(t)>\varphi(\frac{3}{10})>0$ □□ $f(\frac{4}{t})>0$ □

□□□□ $y=m(x)$ □ 4 □□□□□□□□□□□□

□□□□□ t □□□□□□ $\left\{\frac{3}{10}\right\}\cup[-\frac{3}{8},0]$ □

7□□□□□ $f(x)=lnx-a\sqrt{x}$ □

□I□□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□□□□□ k □□□□ $g(x)=kx-1+f(x)$ □□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□I□ $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{2\sqrt{x}}=\frac{2-a\sqrt{x}}{x}(x>0)$ □…………………………□1 □□

① □ $a\leq 0$ □□ $f'(x)>0$ □□□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□…………………………□2 □□

② □ $a>0$ □□ $f'(x)=0$ □□ $x=\frac{4}{a^2}$ □

□ $x\in(0,\frac{4}{a^2})$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□

□ $x\in(\frac{4}{a^2},+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□ ……………………………… □3 □□

□□□ $a\leqslant 0$ □□ $f(x)$ □□□□ $(0,+\infty)$ □

$a>0$ □□ $f(x)$ □□□□ $(0,\frac{4}{a^2})$ □□□□ $(\frac{4}{a^2},+\infty)$ □ ……………………………… □4 □□

□II□□□□ $g(x)=kx+\ln x-a\sqrt{x}-1$ □

□ $kx+\ln x-a\sqrt{x}-1=0$ □□□□ $a=k\sqrt{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ □□ $a=k\sqrt{x}+\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ □□□□

□ $h(x)=kx+\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ □ $h'(x)=\frac{kx^2-2\ln x+3}{x^2}=0$ □□□ $kx^2-2\ln x+3=0$ □□ $k=\frac{\ln x^2-3}{x^2}$ □ ………………………………

□6 □□

□ $M(t)=\frac{\ln t-3}{t}$ □□ $M'(t)=\frac{4-\ln t}{t^2}=0$ □□ $t=e^4$ □ $t\in(0,e^4)$ □□ $M'(t)>0$ □ $M(t)$ □□□□ ……………………………… □5 □□

$t\in(e^4$ □ $+\infty)$ □□ $M'(t)<0$ □ $M(t)$ □□□□□□□□ $x\to+\infty$ □□ $M(t)>0)M(t)\leqslant M(e^4)=\frac{1}{e^4}$ □

□ $k\geqslant\frac{1}{e^4}$ □□ $h'(x)\geqslant 0$ □□□□□ $a\in R$ □□□□□

□ $0<k<\frac{1}{e^4}$ □□ $k=\frac{\ln t-3}{t}$ □□□□□□□ t_1 □ t_2 □ $0<t_1<e^4<t_2$ □ ……………………………… □7 □□

$k=\frac{2\ln x-3}{x^2}$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □ $x_1=\sqrt{t_1},x_2=\sqrt{t_2}$ □□ $0<x_1<e^2<x_2$ □

□□□□ $h(x)$ □ $(0,x_1)$ □ $(x_2$ □ $+\infty)$ □□□□ $(x_1$ □ $x_2)$ □□□□

□□ $0<k<\frac{1}{e^4}$ □ $a\in(h(x_2)_{min}$ □ $h(x_1)_{max})$ □ ……………………………… □8 □□

□□□□ $h(x_1)$ □ $h(x_2)$ □□□□□

□□□□□□□ $kx_1^2-2lnx_1+3=0$ □□ $kx_1=\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{3}{x_1}$ □

$h(x_1)=kx_1+\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{3}{x_1}+\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{4lnx_1-4}{x_1}$ □ $0<x_1<e^2$ □

□ $N(x)=\frac{4lnx-4}{x}$ □ $0<x<e^2$ □ $N'(x)=\frac{4(2-lnx)}{x^2}$ □□□ $N(x)$ □ $0<x<e^2$ □□□□□

$N(x)<N(e^2)=\frac{4}{e^2}$ □□ $h(x_1)<\frac{4}{e^2}$ □ $\therefore a\geqslant\frac{4}{e^2}$ □……………………………□10 □□

□□ $h(x_2)=\frac{4lnx_2-4}{x_2}$ □ $x_2>e^2$ □……………………………□11 □□

□□□□□ $N(x)=\frac{4lnx-4}{x}$ □ $(e^2$ □ $+\infty)$ □□□□□□ $x\to+\infty$ □□ $N(x)\to 0$ □

$\therefore h(x_2)>0$ □ $\therefore a>0$ □

□□□ $a\in(0,\frac{4}{e^2})$ □……………………………□12 □□

8□□□□ $f(x)=x^3+bx+c$ □□□ $y=f(x)$ □□ $(\frac{1}{2}$ □ $f(\frac{1}{2}))$ □□□□□ y □□□□

□1□□ b □

□2□□ $f(x)$ □□□□□□□□□1 □□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□1□

□□□□1□□□□ $f(x)=x^3+bx+c$ □□ $f'(x)=3x^2+b$ □

$\therefore f'(\frac{1}{2})=3\times(\frac{1}{2})^2+b=0$ □□ $b=-\frac{3}{4}$ □

□2□□□□□□□□ x_0 □ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□ $f(x_0)=x_0^3-\frac{3}{4}x_0+c=0$ □□ $|x_0|\leqslant 1$ □

□ $c=-x_0^3+\frac{3}{4}x_0$ □□ $|x_0|\leqslant 1$ □

□ $c(x)=-x^3+\frac{3}{4}x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ □

$\therefore c'(x)=-3x^2+\frac{3}{4}=-3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ □

当 $x\in(-1,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$ 时，$c'(x)<0$，当 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时，$c'(x)>0$

可知 $c(x)$ 在 $(-1,-\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},1)$，上单调递减，在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上单调递增.

又 $c(-1)=\frac{1}{4}$，$c(1)=-\frac{1}{4}$，$c(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$，$c(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，

$\therefore -\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

设 x_1 为 $f(x)$ 的零点，则必有 $f(x_1)=x_1^3-\frac{3}{4}x_1+c=0$，

即 $-\frac{1}{4}\leqslant c=-x_1^3+\frac{3}{4}x_1\leqslant\frac{1}{4}$，

$\therefore \begin{cases}4x_1^3-3x_1-1=(x_1-1)(2x_1+1)^2\leqslant 0\\4x_1^3-3x_1+1=(x_1+1)(2x_1-1)^2\geqslant 0\end{cases}$，得 $-1\leqslant x_1\leqslant 1$，

即 $|x_1|\leqslant 1$.

$\therefore f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

法二、由（1）可得，$f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$.

$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$，

可得当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上单调递减.

且 $f(-1)=c-\frac{1}{4}$，$f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}$，$f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}$，$f(1)=c+\frac{1}{4}$，

若 $f(x)$ 的所有零点中存在一个绝对值大于 1 的零点 x_0，则 $f(-1)>0$ 或 $f(1)<0$.

即 $c>\frac{1}{4}$ 或 $c<-\frac{1}{4}$.

当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\frac{1}{4}>0$，$f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}>0$，$f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}>0$，$f(1)=c+\frac{1}{4}>0$，

□ $f(-4c)=-64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)<0$□

□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(-4c,-1)$ □□□□□□□□

□ $f(x)$ □ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□□□ 1 □□□□□□□□

□ $c<-\frac{1}{4}$ □□ $f(-1)=c-\frac{1}{4}<0$ □ $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}<0$ □ $f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}<0$ □ f □1□ $=c+\frac{1}{4}<0$ □

□ $f(-4c)=64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)>0$□

□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(1,-4c)$ □□□□□□□□

□ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□□ $(-\infty,1)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□□□ 1 □□□□□□□□

□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□ 1□

9□□□□ $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{a+1}{2}x^2+x+b$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□

□2□□ $ab=c(c$ □□ a □□□□□ $a\neq 0)$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ a □□□□□□□ $(-\infty$ □ $-1)\cup(0$ □ $\frac{1}{7})\cup(4$ □ $+\infty)$ □□ c □□□

□□□□□□1□ $f'(x)=ax^2-(a+1)x+1=(ax-1)(x-1)$ □

□ $a=0$ □□ $f'(x)=1-x$ □

□□ $(-\infty,1)$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□

□ $a=1$ □□ $f'(x)=(x-1)^2\ldots 0$ □ $f(x)$ □□□□

□$a<0$□□$\frac{1}{a}<1$□□□□$(\frac{1}{a},\ 1)$□□$f'(x)>0$□$f(x)$□□□□□

□$(-\infty,\ \frac{1}{a})$□$(1,+\infty)$□□$f'(x)<0$□$f(x)$□□□□□

□$0<a<1$□□$\frac{1}{a}>1$□□□□$(1,\ \frac{1}{a})$□□$f'(x)<0$□$f(x)$□□□□□

□$(-\infty,1)$□$(\frac{1}{a},\ +\infty)$□□$f'(x)>0$□$f(x)$□□□□□

□$a>1$□□$\frac{1}{a}<1$□□□□$(\frac{1}{a},\ 1)$□□$f'(x)<0$□$f(x)$□□□□□

□$(-\infty,\ \frac{1}{a})$□$(1,+\infty)$□□$f'(x)>0$□$f(x)$□□□□□

□□□□$a=0$□□$f(x)$□$(-\infty,1)$□□□□□□□$(1,+\infty)$□□□□□□

□$a=1$□□$f(x)$□□□□□

□$a<0$□□$f(x)$□$(\frac{1}{a},\ 1)$□□□□□□□$(-\infty,\ \frac{1}{a})$□$(1,+\infty)$□□□□□□

□$0<a<1$□□$f(x)$□$(-\infty,1)$□$(\frac{1}{a},\ +\infty)$□□□□□□□$(1,\ \frac{1}{a})$□□□□□□

□$a>1$□□$f(x)$□$(-\infty,\ \frac{1}{a})$□$(1,+\infty)$□□□□□□□$(\frac{1}{a},\ 1)$□□□□□□

□2□□$a\neq 0$□1□□□□□□□□□$f(\frac{1}{a})=\frac{6a^2b+3a-1}{6a^2}$□$f(1)=\frac{3a-a^2+6ab}{6a}$□

□□□$f(x)$□□□□□□□□$\Leftrightarrow f(\frac{1}{a})\cdot f(1)<0$□□$\frac{(6a^2b+3a-1)(3a-a^2+6ab)}{36a^3}<0$□

□□$ab=c$□□□$a^3(6ac+3a-1)(3a-a^2+6c)<0$□□□□

□□□a□□□□□□□□$(-\infty,\ -1)\cup(0,\ \frac{1}{7})\cup(4,\ +\infty)$□

□□□g□a□$=a^3(6ac+3a-1)(3a-a^2+6c)$□

□□□□□□$-1,\ \frac{1}{7},\ 4$□

□ $a=-1$ □□ $g(-1)=-(2+3c)(2-3c)=0$ □□ $c=\pm\frac{2}{3}$ □

□ $c=\frac{2}{3}$ □□ g □a□ $=a^3(7a-1)(3a-a^2+4)<0$

$\Leftrightarrow a^3(7a-1)(a^2-3a-4)=a^3(7a-1)(a-4)(a+1)>0$ □

a □□□□□□ $(-\infty,-1)\cup(0,\frac{1}{7})\cup(4,+\infty)$ □□□□□

□ $c=-\frac{2}{3}$ □□ g □a□ $=a^3(-a-1)(3a-a^2-4)<0$ □

□ $a^3(a+1)(a^2-3a+4)<0$ □ a □□□□□□ $(-1,0)$ □□□

□□ $c=\frac{2}{3}$ □

10□□□□□ $f(x)=x^2-ax-|ax-2|$ □ $(a>0)$ □

(I)□ $a\in(0,2)$ □□□□□ $f(x)<0$ □

(II)□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □ x_4 □□□ $y=f(x)+1$ □□□□□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□□□□□□□□

□□□□

□□□□□□I□□□ $f(x)=x^2-ax-|ax-2|$ □ $(a>0)$ □

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2, & x\geqslant\frac{2}{a}\\ x^2-2, & x<\frac{2}{a}\end{cases}$$ □

□□□1□□ $x<\frac{2}{a}$ □□ $f(x)<0$ □□□ $x^2-2<0$ □□ $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ □

□ $\frac{2}{a}\geqslant\sqrt{2}$ □□□ $0<a\leqslant\sqrt{2}$ □□□□□□□□□ $\{x|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$ □

□ $\frac{2}{a}<\sqrt{2}$ □□□ $\sqrt{2}<a<2$ □□□□□□□□□ $\{x|-\sqrt{2}<x<\frac{2}{a}\}$ □

□2□□ $x\geqslant\frac{2}{a}$ □□ $f(x)<0$ □□□ $x^2-2ax+2<0$ □

□△ $=4a^2-8\le 0$□□□ $0<a\le\sqrt{2}$ □□ $f(x)<0$□□□

□△ $=4a^2-8>0$□□□ $\sqrt{2}<a\le 2$□□

□ $f(x)<0$□□□ $a-\sqrt{a^2-2}<x<a+\sqrt{a^2-2}$□

□□□□ $a+\sqrt{a^2-2}>\sqrt{2}>\frac{2}{a}$□

$a-\sqrt{a^2-2}=\frac{2}{a+\sqrt{a^2-2}}<\frac{2}{a}$□

$\therefore$□□□□□□□ $\{x|\frac{2}{a}\le x<a+\sqrt{a^2-2}\}$□

□□□□1□□□2□□□□□ $0<a\le\sqrt{2}$ □□□□□□□□□□ $\{x|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$□

□ $\sqrt{2}<a<2$ □□□□□□□□□□ $\{x|-\sqrt{2}<x<a+\sqrt{a^2-2}\}$□

□II□□□ $a=\frac{7}{4}$ □□□□□□□□□□□□□□□

□□□ $f(x)+1=\begin{cases}x^2-2ax+3, & x\ge\frac{2}{a}\\ x^2-1, & x<\frac{2}{a}\end{cases}$ □

□□ $y=f(x)+1$□□□□□□□□□

□□□△ $=4a^2-12>0$□ $\frac{2}{a}>1$ □

$\therefore\sqrt{3}<a<2$□

□□□□ $x_1<x_2<x_3<x_4$□□□ $x_1=-1$□ $x_2=1$□

①□ x_1□ x_2□ x_3□□□□□□□□□ $x_3=3$□□□ $a=2$□ $x_4=1$□□□□□

②□ x_1□ x_2□ x_4□□□□□□□□①□□□□□

③ □ x_1 □ x_3 □ x_4 □□□□□□□□□ $\begin{cases}2x_3=-1+x_4\\x_3+x_4=2a\end{cases}$ □

□□□ $x_3=\frac{2a-1}{3}$ □

$(\frac{2a-1}{3})^2-2a\times\frac{2a-1}{3}+3=0$ □

$4a^2+a-14=0$ □

$a=-\frac{7}{4}$ □ $a=2$ □□□

④ □ x_2 □ x_3 □ x_4 □□□□□□□□□ $\begin{cases}2x_3=1+x_4\\x_3+x_4=2a\end{cases}$ □

$x_3=\frac{2a+1}{3}$ □

$(\frac{2a+1}{3})^2-2a\times\frac{2a+1}{3}+3=0$ □

$4a^2+a-14=0$ □

□□□ $a=\frac{7}{4}$ □ $a=-2$ □□□□

□□□□□□□ $a=\frac{7}{4}$ □□□□□

11□□□□ $f(x)=(x^2-2x)lnx+(a-\frac{1}{2})x^2+2(1-a)x+a$ □

(I)□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□ $a<-2$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□

□□□□□□ $(I)\ f'(x)=2(x-1)(lnx+a)(x>0)$ □

① □ $a=0$ □□ $f'(x)=2(x-1)lnx$ □□ $0<x<1$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $x=1$ □□ $f'(x)=0$ □ $\therefore f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□

②□$a>0$□□□$f'(x)=0$□□$x_1=1, x_2=e^{a}$□□□$e^{a}<1$□

□□$f(x)$□$(0,e^{a})$□□□$(e^{a}$□$1)$□□□$(1,+\infty)$□□

③□$a<0$□□$e^{a}>1$□□□$f(x)$□$(0,1)$□□□$(1,e^{a})$□□□$(e^{a}$□$+\infty)$□□

□II□□$a<-2$□□□(I)□$f(x)$□$(0,1)$□□□□$(1,e^{a})$□□□□$(e^{a}$□$+\infty)$□□□□

□$f(1)=a-\frac{1}{2}+2(1-a)+a=\frac{3}{2}>0$□□$x=e^{a}$□□$f(x)$□

□$f(x)=f(e^{a})=(x^2-2x)(-a)+(a-\frac{1}{2})x^2+2(1-a)x+a=-\frac{1}{2}(x-2)^2+a+2$□ $a<-2$□$\therefore f(e^{a})<0$□

□□□□□$x\in(0,1)$□□□x_0□□$f(x_0)<0$□

□□□□□□□$lnx<x-1$□$\therefore ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$□$\therefore -lnx<\frac{1-x}{x}$□$\therefore lnx>\frac{1-x}{x}$□

□ □ □ $x^2-2x=x(x-2)<0$□

$\therefore f(x)=(x^2-2x)lnx+(a-\frac{1}{2})x^2+2(1-a)x=a<(x^2-2x)\frac{1-x}{x}+(a-\frac{1}{2})x^2+2(1-a)x+a=(a+\frac{1}{2})(x-1)^2+\frac{3}{2}$□

□□$(a+\frac{1}{2})(x-1)^2+\frac{3}{2}=0$□□□□□□□□$x=1-\sqrt{\frac{-3}{2a+1}}$□ $a<-2$□$\therefore 0<\frac{-3}{2a+1}<1$□$\therefore 0<1-\sqrt{\frac{-3}{2a+1}}<1$□□□

$x_0=1-\sqrt{\frac{-3}{2a+1}}, x_0\in(0,1)$□

□□$f(x_0)<0$□□□□□□□□□□□□$f(x)$□$(0,1)$□□□□□□□□$f(x)$□$(0,1)$□□□□□□□□□□

□f□1□>0□$f(e^{a})<0$□□$f(x)$□□□□□□□$f(x)$□$(1,e^{a})$□□□□□□□

□□□□□$x\in(e^{a}$□$+\infty)$□□□□x_1□□$f(x_1)>0$□□□$x_1=e^{-a+\frac{1}{2}}$□□$x_1>e^{a}$□$\therefore$

$f(x_1)=(x_1^2-2x_1)(-a+\frac{1}{2})+(a-\frac{1}{2})x_1^2+2(1-a)x_1+a=x_1+a>e^{a}+a$□

□□□□ $e^x > x+1$ □□ $e^{a}+a>(-a+1)+a>0$ □□ $f(x_1)>0$ □

□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(e^{a}$ □ $+\infty)$ □□□□□□

□□□□□ $f(x)$ □ $a<-2$ □□□□ 3 □□□□

12□□□□□ $f(x)=2x\ln a-(x+a)\ln x$ □

□1□□ $a=e$ □□□□□ $y=f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□

□2□□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□□□□□□□1□□ $a=e$ □□ $f(x)=2x-(x+e)\ln x$ □□□□ $f'(x)=2-\ln x-\frac{x+e}{x}=1-\ln x-\frac{e}{x}$ □

□□□□ $y=f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□□ $1-\ln 1-e=1-e$ □

□□□ $(1,2)$ □

□□□□ $y-2=(1-e)(x-1)$ □□□ $y=(1-e)x+1+e$ □

□2□□□ $a>0$ □□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

$f'(x)=2\ln a-\ln x-\frac{x+a}{x}$ □□ $g(x)=f'(x)=2\ln a-\ln x-\frac{x+a}{x}$ □□ $g'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}$ □

□ $0<x<a$ □□ $g'(x)>0$ □□ $x>a$ □□ $g'(x)<0$ □

□□ $g(x)$ □ $(0,a)$ □□□□□□□ $(a,+\infty)$ □□□□□□

□ $g(x)$ □□□□□ $g(x)_{max}=g$ □a□ $=\ln a-2$ □

□$\ln a-2\leqslant 0$□□$0<a\leqslant e^2$□□g□a□$\leqslant 0$□

□□$g(x)\leqslant 0$□□$f'(x)\leqslant 0$□ $f(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□□ f'□a□$=0$□□ $f(x)$ □□□□□□□

□$\ln a-2>0$□□$a>e^2$□□g□a□>0□g□1□$=2\ln a-1-a$□

□h□a□$=2\ln a-1-a(a>e^2)$□□h□a□$=\frac{2}{a}-1=\frac{2-a}{a}<0$□

□□h□a□□$(e^2$□$+\infty)$□□□□□□h□a□$<4-1-e^2=3-e^2<0$□□g□1□<0□

□g□a□>0□$g(x)$□$(0,a)$□□□□□□□□□□$x_1\in(1,a)$□□□$g(x_1)=0$□

□$0<x<x_1$□□$g(x)<0$□□$x_1<x<a$□□$g(x)>0$□

□□$0<x<x_1$□□$f'(x)<0$□□$x<x<a$□□$f'(x)>0$□

□□□□□$g(a^2)=2\ln a-\ln a^2-\frac{a^2+a}{a^2}=-\frac{a^2+a}{a^2}<0$□

□g□a□>0□$g(x)$□$(a,+\infty)$□□□□□□□□□□$x_2\in(a,a^2)$□□□$g(x_2)=0$□

□$a<x<x_2$□□$g(x)>0$□□$x>x_2$□□$g(x)<0$□

□□$a<x<x_2$□□$f'(x)>0$□□$x>x_2$□□$f'(x)<0$□

□□□□$0<x<x_1$□□$f'(x)<0$□□$x_1<x<x_2$□□$f'(x)>0$□□$x>x_2$□□$f'(x)<0$□

□$f(x)$□$(0,x_1)$□□□□□□□$(x_1$□$x_2)$□□□□□□□$(x_2$□$+\infty)$□□□□□□

□□ f（a）$=0$ □□ $x_1 < a < x_2$ □□□ $f(x)$ □ $(x_1$ □ $x_2)$ □□□□□□□□ $f(x_1) < 0$ □ $f(x_2) > 0$ □

□ f （1）$=2lna > 0$ □□□ $f(x)$ □ $(1, x_1)$ □□□□□□□□ $f(x)$ □ $(0, x_1)$ □□□□□□□

□ $f(a^2) = 2a^2 lna - (a^2 + a) lna^2 = -2alna < 0$ □□□ $f(x)$ □ $(x_2$ □ $a^2)$ □□□□□□□□ $f(x)$ □ $(x_2$ □ $+\infty)$ □□□□□□□

□□ $a > e^2$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□

□□□□ $0 < a \leq e^2$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□ $a > e^2$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□

13□□□□□ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x + b(a > 0)$ □

□1□□□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□ $y=-3x+2$ □□□□ a □ b □

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ $\frac{b}{a^2}$ □□□□□□

□□□□□□□1□□ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x + b$ □□ $f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2$ □

$\therefore$ □□ $f(x)$ □□ $(0, b)$ □□□□□□□ $f'(0) = -3a^2$ □

$\therefore$ □□□□□ $y - b = -3a^2(x - 0)$ □□ $y = -3a^2x + b$ □

□□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□ $y=-3x+2$ □

$\therefore \begin{cases} -3a^2 = -3 \\ b = 2 \end{cases}$ □□□ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ □

□2□□□ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x + b$ □□ $f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2$ □

□ $f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ □□ $(x - 3a)(x + a) = 0$ □

□ $a > 0$ □

$\therefore$□□□ $x\in(-\infty$ □ $-a)\cup(3a$ □ $+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □□ $x\in(-a,3a)$ □□ $f'(x)<0$ □

$\therefore$□□ $f(x)$ □ $(-\infty,-a)$ □□□□□ $(-a,3a)$ □□□□□ $(3a,+\infty)$ □□□□□

$\therefore\ f(x)$ □□□□□ $f(-a)$ □□□□□ $f(3a)$ □

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ $\begin{cases} f(-a)>0 \\ f(3a)<0 \end{cases}$ □

□ $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}a^3-a^3+3a^3+b>0 \\ \dfrac{1}{3}\cdot 27a^3-9a^3-9a^3+b<0 \end{cases}$ □□□ $-\dfrac{5}{3}<\dfrac{b}{a^3}<9$ □

14□□□□□ $f(x)$ □□ $\forall x$□ $y\in R$□□□ $f(x+y)-f(y)-x^2-2xy+3x=0$□□□□□ f□2□$=-1$□

□1□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ □ $G(x)=h(|2^x-1|)+\dfrac{2m}{|2^x-1|}-5m$ □□□□□□□ m □□□□□□

□□□□□□1□□□ $f(x)$ □□ $\forall x$□ $y\in R$□□□ $f(x+y)-f(y)-x^2-2xy+3x=0$□□□□

□ $x=2$□ $y=0$□□ f□2□$-f(0)+2=0$□

□ f□2□$=-1$□□□ $f(0)=1$□

□ $y=0$□□ $f(x)-f(0)-x^2+3x=0$□

□□ $f(x)=x^2-3x+1$□

□2□□□ $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}-3$ □

□ $|2^x-1|=t$□□□□ $t\neq0$□

□□ $t>0$□

□ $t \geq 1$ □□□ $t=|2^x-1|$ □□□□

□ $0<t<1$ □□□□□□□

□ $G(x)=h(|2^x-1|)+\dfrac{2m}{|2^x-1|}-5m=t+\dfrac{1}{t}-3+\dfrac{2m}{t}-5m=0$ □

□□□□ $t^2-(3+5m)t+2m+1=0$ □□□□□□□□ $0<t_1<1$ □ $t_2>1$ □ $0<t_1<1$ □ $t_2=1$ □

□ $h(x)=t^2-(3+5m)t+2m+1$ □

□□ $h(x)$ □□□□□□

① □ $0<t_1<1$ □ $t_2>1$ □□ $\begin{cases} h(0)=2m+1>0 \\ h(1)=-3m-1<0 \end{cases}$ □□□ $m>-\dfrac{1}{3}$ □

② □ $0<t_1<1$ □ $t_2=1$ □□ $\begin{cases} 0<\dfrac{3+5m}{2}<1 \\ h(0)=2m+1>0 \\ h(1)=-3m-1=0 \end{cases}$ □□□ $m=-\dfrac{1}{3}$ □

□□□□□ m □□□□□□ $[-\dfrac{1}{3},+\infty)$ □

15□□□ $f(x)=e^x-2ax+b$ □ $F(x)=\dfrac{x}{2}f(x)-\dfrac{x}{2}e^x+e^x-1+\dfrac{1}{2}bx$ □

□I□□□ $f(x)$ □□□ $[0$ □ $1]$ □□□□□□

□II□□ $F(\dfrac{1}{2})=\dfrac{a}{4}-\dfrac{1}{2}(\sqrt{e}-1)^2$ □□ $F(x)$ □ $[0$ □ $1]$ □□□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□I□ $f'(x)=e^x-2a$ □ $0 \leq x \leq 1$ □

□ $-2a \geq 0$ □□ $a \leq 0$ □ $f'(x)>0$ □ $[0$ □ $1]$ □□□□□□ $f(x)$ □ $[0$ □ $1]$ □□□□□□

□ $-2a<0$ □□ $a>0$ □□ $f'(x)=0$ □□□ $x=ln2a$ □

□ $0<a \leq \dfrac{1}{2}$ □□□ $f'(x)>0$ □ $[0$ □ $1]$ □□□□□□ $f(x)$ □ $[0$ □ $1]$ □□□□□□

若 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，则当 $x\in[0,\ln 2a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\ln 2a,1]$ 时，$f'(x)>0$，

所以，$f(x)$ 在 $[0,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,1]$ 上单调递增，

当 $a\geq\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)<0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，

综上可知，当 $a\leq\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,1]$ 上单调递增，

当 $a\geq\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减；

（Ⅱ）由题意可知，$F(x)=\frac{x}{2}f(x)-\frac{x}{2}e^x+e^x-1+\frac{1}{2}bx=-ax^2+bx-1+e^x$，

则 $F(\frac{1}{2})=-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-1+\sqrt{e}=\frac{a}{4}-\frac{1}{2}(\sqrt{e}-1)^2$，

整理得 $b=a+1-e$，

所以 $F(x)=e^x-ax^2+bx-1=e^x-ax^2+(a+1-e)x-1$，

因为 $F(0)=0$，$F(1)=e-a+a+1-e-1=0$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三个零点，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 只有一个零点，且不单调，

$F'(x)=e^x-2ax+a+1-e=f(x)$，

由（Ⅰ）可知：

当 $a\leq\frac{1}{2}$ 时，$F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$F'(0)=2+a-e<0$，$F'(1)=1-a>0$，

所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $F'(x_0)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1]$ 上单调递增，

此时 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有两个零点，不符合题意；

$a\geq\frac{e}{2}$ 时，$F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，同理可得 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有两个零点，不符合题意；

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，$F'(x)$ 在 $[0,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,1]$ 上单调递增，

$F(\ln 2a)=2a-2a\ln 2a+a+1-e=3a-2a\ln 2a+1-e$,

令h(a)$=3a-2a\ln 2a+1-e$, h'(a)$=3-2\ln 2a-2=1-2\ln 2a=0$, 得$a=\frac{\sqrt{e}}{2}$,

当$\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{e}}{2}$时, h'(a)>0,

当$\frac{\sqrt{e}}{2}<a<\frac{e}{2}$时, h'(a)<0,

$h(a)_{max}=\sqrt{e}+1-e<0$, 即$F(\ln 2a)=2a-2a\ln 2a+a+1-e=3a-2a\ln 2a+1-e<0$,

又$F(0)=2+a-e$, F(1)$=1-a$,

$F(x)$在$(0,1)$只有一个零点, 只需$\begin{cases}2+a-e>0\\1-a>0\end{cases}$,

$\therefore e-2<a<1$, 又$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$,

所以a的取值范围为: $e-2<a<1$.

16. 已知二次函数$y=f(x)$的图象与直线$y=-6$只有一个交点, 满足$f(0)=-2$, 且函数$f(x-2)$是偶函数, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

(1) 求二次函数$y=f(x)$的解析式;

(2) 若对任意$x\in[1,2]$, $t\in[-4,4]$, $g(x)\geq -m^2+tm$恒成立, 求实数m的范围;

(3) 若函数$y=g(|x|+3)+k\cdot\frac{2}{|x|+3}-11$恰好三个零点, 求$k$的值及该函数的零点.

【解答】解: (1) 因为$f(x-2)$是偶函数, 所以$f(x-2)=f(-x-2)$,

所以$f(x)$的图象关于$x=-2$对称,

又二次函数$y=f(x)$的图象与直线$y=-6$只有一个交点,

□ $f(x)=a(x+2)^2-6$ □

□□ $f(0)=4a-6=-2$ □□ $a=1$ □

□□ $f(x)=(x+2)^2-6=x^2+4x-2$ □

□2□□□1□□ $g(x)=x-\frac{2}{x}+4$

□□ $g(x)$ □□□ $[1$ □ $2]$ □□□□

□□ $g(x)_{min}=3$ □

□□ $3\geq -m^2+tm$ □ $m^2-tm+3\geq 0$

□□ $m^2-4m+3\geq 0$ □ $m^2+4m+3\geq 0$ □

□□ $m\geq 3$ □ $m\leq -3$ □

□□ m □□□□□□ $(-\infty$ □ $-3]\cup[3$ □ $+\infty)$ □

□3□□ $n=|x|+3\geq 3$ □

□□ $g(n)+k\cdot\frac{2}{n}-11=0$ □ $n-\frac{2}{n}+4+\frac{2k}{n}-11=0$ □ $\frac{n^2-7n+2k-2}{n}=0$ □

□□□□ $y=g(|x|+3)+k\cdot\frac{2}{|x|+3}-11$ □□□□□

□□ $n^2-7n+2k-2=0$ □□□□□□ 3?

□□ $k=7$ □

□ $k=7$ □□□ $n^2-7n+12=0$ □ $n_1=3$ □ $n_2=4$ □

□ $n_1=3$ □□ $x=0$ □□ $n_2=4$ □□ $x=\pm 1$ □

□□ $k=7$ □

□□□□□□□□0□ ± 1 □